На правах рукописи

Матвеева Анастасия Михайловна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ОСНАЩЕННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В КОНФОРМНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

01.01.04 – геометрия и топология

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2009

Работа выполнена на кафедре геометрии ГОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Столяров Алексей Васильевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Игошин Владимир Александрович
	доктор физико-математических наук, профессор Степанов Сергей Евгеньевич
Ведущая организация:	Тверской государственный университет

Защита состоится 18 июня 2009 года в 16 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д. 212.081.10 при Казанском государственном университете им. В. И. Ульянова-Ленина по адресу: 420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37, НИИММ, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке имени Н. И. Лобачевского Казанского государственного университета им. В. И. Ульянова-Ленина (г. Казань, ул. Кремлевская, 18).

Автореферат разослан «__» апреля 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
канд. физ.-мат. наук, доцент Липачев Е. К.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Постановка вопроса и актуальность темы. Конформно-дифференциальная геометрия трехмерного пространства зародилась внутри классической дифференциальной геометрии в конце XIX века в работах Дарбу, Рибокура и других геометров.

В 1924 г. появляется работа Томсена [28], в которой для изучения конформно-дифференциальной геометрии поверхностей применяются пентасферические координаты и тензорное исчисление. Э. Картан [25] вводит понятие n-мерного пространства конформной связности. В это же время теория многомерных пространств конформной связности разрабатывается в работах Т. И. Томаса, И. М. Томаса и ряда других геометров. С. Сасаки в 1939–40 гг. развивает теорию кривых и гиперповерхностей в пространстве конформной связности. Однако в большинстве перечисленных работ конформно-дифференциальная геометрия многомерных поверхностей строится средствами евклидовой и римановой геометрий, что сильно осложняет геометрическое истолкование полученных результатов.

Новый этап в развитии конформно-дифференциальной геометрии связан с работами отечественных геометров, а именно, с работами с применением к конформной геометрии общей теории образов симметрии в однородных пространствах Б. А. Розенфельда [15], общей теории нормализованных поверхностей А. П. Нордена [11], [12], общей теории многообразий в однородных пространствах и в пространствах со связностями Г. Ф. Лаптева [7], [8].

Метод Г. Ф. Лаптева был применен М. А. Акивисом [1], [2] к построению основ инвариантной теории гиперповерхностей, m-мерных поверхностей n-мерного конформного и псевдоконформного пространств. А. П. Норден [5], [11], [12] получил существенные результаты по конформно-дифференциальной геометрии различных подмногообразий. Л. Ф. Филоненко [19] рассматривает распределение m-мерных линейных элементов в (n-1)-мерном конформном пространстве, используя, в основном, его проективную интерпретацию. Исследования А. М. Михайловой [10] посвящены изучению некоторых вопросов линейных связностей на оснащенной гиперполосе конформного пространства. Т. Н. Глухова (Андреева) [18] исследует линейные связности (аффинные, конформные, нормальные), индуцируемые различными оснащениями гиперповерхности в конформном пространстве. А. В. Столяров [17], [18] рассматривает оснащения и линейные связности на распределениях в конформном пространстве C_n, а также строит пространство конформной связности $C_{n,n}$ на базе пространства проективной связности $P_{n,n+1}$ и изучает внутреннюю геометрию нормализованного пространства конформной связности. А. М. Шелехов [24] решает конформную задачу, поставленную Бляшке: перечислить все регулярные (параллелизуемые) три-ткани, образованные пучками окружностей.

Наряду с интенсивным изучением дифференциальной геометрии голономных многообразий в последние 60–70 лет объектом исследования многих математиков явились неголономные многообразия, то есть распределения m-мерных линейных элементов, погруженных в различные однородные и обобщенные пространства.

В 70-х годах XX века обобщенная теория распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности $P_{n,n}$ (в частности, в проективном пространстве P_n) получила развитие в инвариантной аналитической форме в работах Г. Ф. Лаптева и Н. М. Остиану [9], [13]; в случае распределений гиперплоскостных элементов в пространствах со связностью без кручения эта теория получила свое отражение в работе В. И. Близникаса [3]. А. В. Столяров [16] строит инвариантную двойственную теорию регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов, а также регулярного распределения гиперплоскостных элементов в пространстве проективной связности $P_{n,n}$. Ю. И. Попов [14] развивает инвариантную теорию трехсоставных распределений, вложенных в проективное пространство P_n.

В дифференциальной геометрии важное место занимает теория связностей в различных расслоенных пространствах, а также ее применение при исследовании оснащенных подмногообразий, погруженных в различные пространства.

История теории связностей начинается с 1917 г. с работы Т. Леви-Чивита [27] о параллельном перенесении вектора в римановой геометрии. Г. Вейль [29] для построения единой теории поля ввел понятие пространства аффинной связности. Новый этап в развитии теории связностей открыли работы Э. Картана в 20-х годах XX века, в которых касательные векторные пространства заменялись аффинными, проективными или конформными пространствами. В середине XX века В. В. Вагнер [6] и Ш. Эресман [26] независимо друг от друга ввели общее понятие связности в расслоенном пространстве.

Для изучения геометрии многомерных поверхностей проективного пространства и других однородных пространств, фундаментальная группа которых является подгруппой проективной группы, А. П. Норден разработал метод нормализации [11], [12], который позволил в касательных расслоениях подмногообразий проективного пространства индуцировать аффинные связности без кручения. Г. Ф. Лаптев [7], следуя идеям Э. Картана, линейные связности определяет как множества отображений бесконечно близких слоев расслоения, соответствующих касательным векторам базисного многообразия.

Понятие нормальной связности нормализованного подмногообразия в проективном пространстве ввел А. П. Норден [12] (внешняя связность). Большой вклад в развитие теории нормальных связностей внес А. В. Чакмазян [22], [23]. П. А. Фисунов [21] изучает двойственные нормальные связности на оснащенной регулярной голономной и неголономной гиперполосах n-мерного проективного пространства.

Предметом исследования настоящей работы являются распределение гиперплоскостных элементов и гиперполосное распределение m-мерных линейных элементов, погруженные в конформное пространство C_n (псевдоконформное или собственно конформное), а также линейные связности (аффинные, нормальные, конформные), индуцируемые различными оснащениями (нормальным, касательным, полным) указанных распределений.

Теория конформного пространства C_n и вложенных в него поверхностей к настоящему времени разработана достаточно полно. Однако, вопросы конформно-дифференциальной геометрии оснащенных неголономных поверхностей (распределений) и линейных связностей, индуцируемых при этом, до настоящего времени оставались слабо изученными. Вопросы разработки теоретических и практических положений по изучению оснащенных распределений (в особенности, различных линейных связностей, индуцируемых оснащениями рассматриваемых распределений) в конформном пространстве представляют большой научный интерес и являются актуальными в связи с возможными приложениями полученных результатов в математике, механике и физике.

Цель работы. Целью настоящего диссертационного исследования является разработка инвариантными аналитическими методами ключевых вопросов по изучению оснащенных распределений, погруженных в n-мерное конформное пространство C_n, а именно:

1) построение в разных дифференциальных окрестностях инвариантных внутренним образом определяемых нормальных, касательных, полных оснащений распределения гиперплоскостных элементов и гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов в конформном пространстве C_n;

2) разработка основ теории линейных связностей (аффинных, нормальных, конформных), определяемых различными оснащениями рассматриваемых распределений;

3) приложение аффинной связности, индуцируемой полным оснащением распределения $\mathcal{M}$ гиперплоскостных элементов в C_n, к изучению геометрии тканей на подмногообразии $\mathcal{M}$;

4) приложение теории гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов к изучению внутренней геометрии распределений m-мерных линейных элементов в конформном пространстве C_n.

Методы исследования. Теория указанных оснащенных распределений развивается инвариантными методами дифференциально-геометрических исследований, а именно, методом продолжений и охватов Г. Ф. Лаптева [7] и методом внешних дифференциальных форм Э. Картана [20]. Следует отметить, что результаты по теории линейных связностей получены с применением теории связностей в расслоенных пространствах в форме, данной Г. Ф. Лаптевым [7], [8].

Все результаты получены в минимально специализированной системе отнесения, что позволило получить их в инвариантной форме. Рассмотрения в диссертации проводятся с локальной точки зрения. Все встречающиеся функции предполагаются достаточное число раз дифференцируемыми (то есть изучаемые подмногообразия достаточно гладкие), а при доказательстве теорем существования – аналитическими.

Научная новизна. Все результаты, полученные в диссертационном исследовании в ходе решения поставленных задач, являются новыми. Научная новизна обусловлена тем, что вопросы конформно-дифференциальной геометрии оснащенных распределений и линейных связностей, индуцируемых при этом, геометрами ранее почти не изучались; исключение составляют работы [4], [17], [19] (в работе [17] – §§16, 17).

Использование аналитического метода продолжений и охватов Г. Ф. Лаптева и исследование дифференциально-геометрических структур, индуцируемых полями фундаментальных и оснащающих объектов рассматриваемых подмногообразий, позволило получить новые существенные результаты в теории оснащенных распределений гиперплоскостных элементов и гиперполосных распределений, погруженных в конформное пространство C_n.

В диссертационной работе приведены доказательства всех основных выводов, которые сформулированы в виде теорем.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационная работа имеет теоретическое значение. Полученные в ней результаты могут быть использованы при изучении геометрии различных многообразий, погруженных в пространства более общей структуры (например, в пространство конформной связности). Они могут быть использованы при изучении распределений m-мерных линейных элементов, вложенных в пространства конформной структуры.

Теория, разработанная в диссертации, может быть использована в качестве специальных и факультативных лекционных курсов для студентов старших курсов и аспирантов математических факультетов, а также при выполнении ими курсовых, дипломных и научных работ.

Апробация. Основные результаты диссертационного исследования докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах по современным проблемам геометрии: на заседаниях научно-исследовательского семинара молодых исследователей при кафедре геометрии Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева (2005–2009 гг.), на научно-практических конференциях преподавателей, докторантов и аспирантов Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева (2005–2009 гг.), на Региональной научной конференции «Современные вопросы геометрии и механики деформируемого твердого тела» (г. Чебоксары, 19–20 октября 2006 г.), в Пятой молодежной научной школе-конференции «Лобачевские чтения – 2006» (г. Казань, 28 ноября – 2 декабря 2006 г.), в III Республиканском конкурсе научно-исследовательских работ студентов, аспирантов, молодых ученых и научно-технических работников «Наука XXI века» (г. Чебоксары, декабрь 2006 г.) (работа удостоена диплома и золотой медали за лучшую научно-исследовательскую работу в области естественно-математических наук), на XV международной конференции «Математика. Образование» (г. Чебоксары, 28 мая – 2 июня 2007 г.), в Шестой молодежной научной школе-конференции «Лобачевские чтения – 2007» (г. Казань, 16–19 декабря 2007 г.), на заседаниях Городского геометрического семинара при кафедре геометрии Казанского государственного университета (г. Казань, 2008–2009 гг.).

Публикации. Основные научные результаты, включенные в диссертационную работу, опубликованы в 19 печатных работах автора (см. [1]–[19]).

Вклад автора в разработку избранных проблем. Диссертационная работа является самостоятельным исследованием автора. Все опубликованные научные работы по теме исследования выполнены без соавторов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения (исторический обзор, общая характеристика диссертации, содержание диссертации), трех глав и списка литературы, включающего 121 наименование. Полный объем диссертации составляет 145 страниц машинописного текста.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В **главе I** рассматривается аффинная связность на вполне оснащенном распределении $\mathcal{M}$ гиперплоскостных элементов в конформном пространстве C_n и получено ее приложение к изучению внутренней геометрии тканей на подмногообразии $\mathcal{M}$.

В §§ 1, 2 главы I приводится материал, большая часть которого носит реферативный характер и необходима для дальнейшего изложения. Здесь рассматриваются оснащенные взаимно ортогональные распределения $\mathcal{M}$ гиперплоскостных элементов и $\mathcal{H}$ одномерных линейных элементов, погруженные в конформное пространство C_n.

В п. 3 § 2 вводится понятие сферического распределения гиперплоскостных элементов в C_n, найдены необходимое и достаточное условия, при которых распределение гиперплоскостных элементов в C_n является сферическим (теорема I.4).

В п. 4 § 2 доказано, что полное оснащение распределения $\mathcal{M}$ в C_n при отображении Дарбу в пространстве P_{n+1} индуцирует n-мерное взаимным и двойственным образом нормализованное регулярное гиперполосное распределение Н (n-1)-мерных линейных элементов $(\mathrm{A}_0, \Pi_{n-1})$, для которого базисным распределением π является образ подмногообразия $\mathcal{M}$ и полем характеристик семейства касательных к гиперквадрике Дарбу $Q_n^2 \subset \mathrm{P}_{n+1}$ гиперплоскостей в точках $\mathrm{A}_0 \in Q_n^2$ служит поле прямых $[\mathrm{A}_0\mathrm{A}_n]$, сопряженных текущим элементам π относительно Q_n^2 (теорема I.5).

§ 3 главы I посвящен аффинным связностям, индуцируемым полным оснащением распределений $\mathcal{M}$ гиперплоскостных элементов и $\mathcal{H}$ одномерных линейных элементов в C_n. Доказано, что при полном оснащении одного (а следовательно, каждого) из распределений $\mathcal{M}$ и $\mathcal{H}$ в C_n на подмногообразиях $\mathcal{M}$ и $\mathcal{H}$ индуцируются пространства аффинной связности $A_{n,n-1}$ и $A_{n,1}$ соответственно, которые являются вейлевыми (вообще говоря, с кручением) с полями метрических тензоров g_{ij} и g_{nn} соответственно и дополнительной формой $\Theta = \omega_0^0 - x_K^0 \omega_0^K$ (теоремы I.6, I.7). Для каждого пространства аффинной связности найдены строения тензоров кручения и тензоров кривизны. Доказаны также следующие предложения:

– при полном оснащении распределения $\mathcal{M}$ в C_n пространство аффинной связности $A_{n,n-1}$ имеет нулевое кручение тогда и только тогда, когда исходное распределение $\mathcal{M}$ является сферическим (теорема I.9);

– если аффинная связность пространства $A_{n,n-1}$, индуцируемого полным оснащением распределения $\mathcal{M}$ в C_n, имеет нулевое кручение, то она является римановой с полем метрического тензора g_{ij} тогда и только тогда, когда пространство аффинной связности $A_{n,1}$ есть пространство с абсолютным параллелизмом (теорема I.10);

– если оба пространства аффинной связности $A_{n,n-1}$ и $A_{n,1}$, индуцируемые полным оснащением распределений $\mathcal{M}$ и $\mathcal{H}$ в C_n, имеют нулевое кручение, то пространство $A_{n,n-1}$ является римановым с полем метрического тензора g_{ij} тогда и только тогда, когда пространство $A_{n,1}$ – плоское; в работе приведены инвариантные аналитические условия последнего (теорема I.11).

Найдены необходимое и достаточное условия, при которых пространство аффинной связности $A_{n,n-1}$ является обобщенно римановым (теорема I.12). Эти условия выполняются, например, при полном оснащении распределения $\mathcal{M}$ в C_n полями квазитензоров $\tilde{a}_k \overset{def}{=} \frac{1}{n-1} a_k$, $\tilde{a}_n \overset{def}{=} \frac{1}{n-1} a_n$ второго порядка.

§ 4 главы I посвящен приложению аффинной связности $\overset{n-1}{\nabla}$ пространства $A_{n,n-1}$ к изучению внутренней геометрии тканей, заданных на распределении $\mathcal{M}$ в C_n.

В п. 1 § 4 приведены дифференциальные уравнения ткани на подмногообразии $\mathcal{M}$, рассмотрены некоторые порождаемые ею инвариантные геометрические образы (гармонические гиперсферы F_i, псевдофокальные гиперсферы F_j^i ортогональной ткани). Найден геометрический смысл гармонических гиперсфер ортогональной ткани.

В п. 2 § 4 рассмотрены голономная ткань и гиперсопряженная система в C_n; найдены необходимое и достаточное условия, при которых ткань на распределении $\mathcal{M}$ в C_n является голономной (теорема I.15), а также необходимое и достаточное условия, при которых голономное распределение $\mathcal{M}$ в C_n, несущее ортогональную сопряженную ткань, является гиперсопряженной системой (n>3) (теорема I.16). Доказано, что голономное распределение $\mathcal{M}$ в C_n (n>3), несущее ортогональную сопряженную ткань, есть гиперсопряженная система тогда и только тогда, когда ткань является голономной (теорема I.18).

В п. 3 § 4 рассмотрена ткань линий кривизны на голономном распределении $\mathcal{M}$ в C_n; приведена геометрическая характеристика главных направлений и линий кривизны на голономном распределении $\mathcal{M}$ в C_n.

В п. 4 § 4 рассмотрено параллельное перенесение направления A_0A_i касательной к i-й линии ортогональной ткани на распределении $\mathcal{M}$ в C_n вдоль ее j-й линии в аффинной связности $\overset{n-1}{\nabla}$, индуцируемой полным оснащением распределения $\mathcal{M}$ в C_n. Введены в рассмотрение геодезические и чебышевские ткани в аффинной связности $\overset{n-1}{\nabla}$, получены аналитические условия, характеризующие эти ткани. Доказано, что голономное распределение $\mathcal{M}$ в C_n $(n>3)$ является распределением, несущим чебышевскую ткань линий кривизны, тогда и только тогда, когда оно является гиперсопряженной системой, несущей геодезическую ткань (теорема I.22).

В п. 5 § 4 рассмотрены чебышевские ткани линий кривизны на голономном распределении $\mathcal{M}$ в C_n $(n>3)$, а также на голономном распределении $\mathcal{M}$ 2-мерных линейных элементов в C_3.

Доказаны теоремы существования рассмотренных классов тканей (теоремы I.13, I.17, I.23, I.24).

Глава II посвящена изучению нормальных и конформных связностей на распределении $\mathcal{M}$ гиперплоскостных элементов в конформном пространстве C_n.

В начале § 1 главы II найдены слоевые формы $\{\Theta_n^0, \Theta_n^n\}$ нормальной связности $\nabla^{\perp}$, определяемой в расслоении нормальных окружностей $[P_i]$ при полном оснащении распределения $\mathcal{M}$ в C_n полями квазитензоров x_i^0, x_n^0, причем эти формы зависят от двух полей тензоров $\{\Gamma_{ni}^n\}$ и $\{\Gamma_{ni}^n,\ \Gamma_{ni}^0\}$. При $\Gamma_{ni}^n = \Gamma_{ni}^0 = 0$ связность $\nabla^{\perp}$ обозначается через $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$, при $\Gamma_{ni}^n = 0$, $\Gamma_{ni}^0 \neq 0$ – через $\overset{1}{\nabla}{}^{\perp}$, при $\Gamma_{ni}^n \neq 0$, $\Gamma_{ni}^0 = \Gamma_{ni}^n x_n^0$ связность $\nabla^{\perp}$ в зависимости от охватов тензора Γ_{ni}^n обозначается через $\overset{*}{\nabla}{}^{\perp}$, $\overset{**}{\nabla}{}^{\perp}$. В каждом из этих случаев найдены строения компонент тензоров кривизны – кручения соответствующих пространств нормальной связности.

Доказаны следующие предложения:

– нормальная подсвязность $\overset{0}{\underset{\sim}{\nabla}}{}^{\perp}$ связности $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$, индуцируемой на вполне оснащенном распределении $\mathcal{M}$ в C_n в расслоении окружностей $[P_i]$, плоская (то есть связность $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$ – полуплоская) тогда и только тогда, когда вейлево пространство $A_{n,n-1}$ является обобщенно римановым (теорема II.2); условие теоремы II.2 выполняется, например, если распределение $\mathcal{M}$ в C_n вполне оснащено полями квазитензоров $\tilde{a}_k$, $\tilde{a}_n$ второго порядка;

– если вейлево пространство $A_{n,n-1}$ с полем метрического тензора g_{ij}, индуцируемое полным оснащением распределения $\mathcal{M}$ в C_n полями квазитензоров $\Lambda_i^0 \overset{def}{=} -\Lambda_{in}^n$, $\Lambda_n^0 \overset{def}{=} -\dfrac{1}{n-1}\Lambda_{nk}^k$ первого порядка, имеет нулевое кручение, то это пространство есть риманово тогда и только тогда, когда нормальная связность $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$ является полуплоской; последнее эквивалентно тому, что кососимметричный тензор $x_{[JK]}^0$ обращается в нуль (теорема II.3);

– нормальная связность $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$, индуцируемая полным оснащением распределения $\mathcal{M}$ в C_n, допускающим обращение в нуль тензора $X_{ni}^0 \overset{def}{=} x_{ni}^0 - x_j^0\Lambda_{ni}^j - x_n^0 x_i^0$, вдоль кривых, принадлежащих распределению $\mathcal{M}$, является плоской тогда и только тогда, когда она полуплоская (теорема II.4); это предложение справедливо, например, для сферического распределения;

– нормальная подсвязность $\overset{1}{\underset{\sim}{\nabla}}{}^{\perp}$ связности $\overset{1}{\nabla}{}^{\perp}$, индуцируемой на вполне оснащенном распределении $\mathcal{M}$ в C_n в расслоении окружностей $[P_i]$, плоская (то есть связность $\overset{1}{\nabla}{}^{\perp}$ – полуплоская) тогда и только тогда, когда вейлево пространство $A_{n,n-1}$ является обобщенно римановым (теорема II.6); условие теоремы II.6 выполняется, например, если распределение $\mathcal{M}$ в C_n вполне оснащено полями квазитензоров $\tilde{a}_k$, $\tilde{a}_n$ второго порядка;

– нормальная связность $\overset{1}{\nabla}{}^{\perp}$, индуцируемая полным оснащением распределения $\mathcal{M}$ в C_n с заданным на нем полем тензора Γ_{ni}^0, допускающим обращение в нуль тензора $\tilde{X}_{ni}^0 \overset{def}{=} x_{ni}^0 - x_j^0\Lambda_{ni}^j - x_n^0 x_i^0 + \Gamma_{ni}^0$, вдоль кривых, принадлежащих распределению $\mathcal{M}$, является плоской тогда и только тогда, когда она полуплоская (теорема II.7).

Построен охват тензора Γ^0_{ni}, при котором нормальная связность $\overset{1}{\nabla}{}^{\perp}$ определяется внутренним образом. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых в случае построенного охвата нормальные связности $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$ и $\overset{1}{\nabla}{}^{\perp}$, индуцируемые при полном оснащении распределения $\mathcal{M}$ в C_n полями квазитензоров x^0_i, x^0_n, имеют одинаковые тензоры кривизны – кручения (теорема II.8). Доказано, что при этом охвате нормальные связности $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$ и $\overset{1}{\nabla}{}^{\perp}$, индуцируемые при полном оснащении распределения $\mathcal{M}$ в C_n полями квазитензоров x^0_i, $x^0_n = \tilde{a}_n$, имеют одинаковые тензоры кривизны – кручения тогда и только тогда, когда вейлево пространство $A_{n,n-1}$ является обобщенно римановым (теорем II.9).

В п. 3 § 1 доказано, что нормальная связность $\nabla^{\perp}$, индуцируемая полным оснащением распределения $\mathcal{M}$ в C_n в расслоении окружностей $[P_i]$ с заданным на ней полем ненулевого тензора Γ^n_{ni}, допускающим обращение в нуль тензора $X^0_{ni} \overset{def}{=} x^0_{ni} - x^0_j \Lambda^j_{ni} - x^0_n x^0_i$, вдоль кривых, принадлежащих распределению $\mathcal{M}$, является плоской тогда и только тогда, когда она полуплоская (теорема II.11). Построены охваты тензора Γ^n_{ni}, при которых нормальная связность $\nabla^{\perp}$ определяется внутренним образом (соответственно, нормальные связности $\overset{*}{\nabla}{}^{\perp}$, $\overset{**}{\nabla}{}^{\perp}$). Доказано, что нормальная связность $\overset{*}{\nabla}{}^{\perp}$, индуцируемая на вполне оснащенном полями квазитензоров x^0_i, $x^0_n = \tilde{a}_n$ распределении $\mathcal{M}$ в C_n в расслоении окружностей $[P_i]$, является полуплоской (теорема II.12); в случае полного оснащения распределения $\mathcal{M}$, допускающего обращения в нуль тензора X^0_{ni}, вдоль кривых, принадлежащих распределению $\mathcal{M}$, нормальная связность $\overset{*}{\nabla}{}^{\perp}$ является плоской.

В § 2 главы II нормальные связности $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$, $\overset{1}{\nabla}{}^{\perp}$, $\overset{*}{\nabla}{}^{\perp}$, $\overset{**}{\nabla}{}^{\perp}$ рассмотрены на регулярном гиперполосном распределении H в проективном пространстве P_{n+1}, ассоциированном с распределением $\mathcal{M}$ в C_n.

В п. 1 § 2 найден геометрический смысл обращения в нуль тензора X^0_{nk} (теорема II.13). К этому классу распределений относится, например, сферическое распределение гиперплоскостных элементов. В нормали первого рода гиперполосного распределения H в P_{n+1} найдена инвариантная прямая $h \equiv [A_0 N_{n+1}]$, внутренним образом определяемая в первой дифференциальной окрестности.

В п.2 § 2 найдено условие параллельности гладкого поля одномерных направлений, принадлежащего полю нормалей первого рода гиперполосного распределения H в P_{n+1}, в нормальной связности $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$ при смещении вдоль любой кривой, принадлежащей распределению π в P_{n+1}. Доказаны следующие предложения:

– при полном оснащении распределения $\mathcal{M}$ в C_n поле характеристик $[A_0 A_n]$ гиперполосного распределения H в P_{n+1} параллельно переносится в нормальной связности $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$ при смещении вдоль любой кривой, принадлежащей распределению π (n-1)-мерных плоскостей в P_{n+1} (теорема II.14);

– поле инвариантных прямых $h \equiv [A_0 N_{n+1}]$ на гиперполосном распределении H в P_{n+1} является параллельным в нормальной связности $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$ при смещении вдоль любой кривой, принадлежащей распределению π (n-1)-мерных плоскостей в P_{n+1}, тогда и только тогда, когда тензор $B^{n}_{n+1,k}$ обращается в нуль (теорема II.15).

Теоремы II.14, II.15 сформулированы также на языке конформного пространства (теоремы II.14*, II.15*).

Условие параллельности гладкого поля одномерных направлений, принадлежащего полю нормалей первого рода гиперполосного распределения H в P_{n+1}, записано также относительно нормальных связностей $\overset{1}{\nabla}{}^{\perp}$, $\overset{*}{\nabla}{}^{\perp}$, $\overset{**}{\nabla}{}^{\perp}$; для этих связностей справедливы аналоги теорем III.14, III.15.

В § 3 главы II рассматриваются конформные связности, индуцируемые касательным и полным оснащениями распределения $\mathcal{M}$ в C_n.

В п. 1 § 3 доказано, что инвариантное касательное оснащение распределения $\mathcal{M}$ в C_n полем гиперсфер P_n индуцирует пространство конформной связности $C_{n,n-1}$ с полем метрического тензора g_{ij}, определяемое системой $(n+1)^2$ форм Пфаффа Ω^b_a, причем если пространство $C_{n,n-1}$ имеет нулевое кручение, то оно является эквиконформным, выполняются аналоги тождеств Риччи, распределение $\mathcal{M}$ голономно и поле касательных гиперсфер P_n определяется внутренним образом в первой дифференциальной окрестности полем квазитензора $\Lambda^0_n \overset{def}{=} -\dfrac{1}{n-1}\Lambda^k_{nk}$ (теорема II.16). Найдено строение тензора кривизны – кручения пространства конформной связности $C_{n,n-1}$. При перенесении Дарбу пространства C_n на проективное пространство P_{n+1} все точки каждого слоя пространства конформной связности $C_{n,n-1}$ отображаются в точки квадрики Дарбу $Q^2_{n-1} \subset P_{n+1}$, получающейся при пересечении гиперквадрики Дарбу Q^2_n с полярой точки P_n относительно этой гиперквадрики (теорема II.17).

В п.п. 2, 3 § 3 доказано, что инвариантное полное оснащение распределения $\mathcal{M}$ в C_n полями квазитензоров x^0_i, x^0_n задает нормализацию пространства конформной связности $C_{n,n-1}$, определяемую полем окружностей $[P_i]$ (теорема II.18). Если полное оснащение распределения $\mathcal{M}$ в C_n является невырожденным (то есть основной тензор a^0_{ij} невырожден), то индуцируется второе пространство конформной связности $\overset{1}{C}_{n,n-1}$, метрический тензор которого совпадает с метрическим тензором g_{ij} пространства $C_{n,n-1}$ (теорема II.19); приведены строения компонент тензора кривизны – кручения пространства $\overset{1}{C}_{n,n-1}$.

В **главе III** разработаны основы теории гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов в конформном пространстве C_n и указаны пути ее приложения.

В § 1 записываются дифференциальные уравнения гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов в C_n, для которого базисным распределением является распределение $\mathcal{K}$ m-мерных линейных элементов, а оснащающим – распределение $\mathcal{M}$ гиперплоскостных элементов.

В § 2 в первой дифференциальной окрестности построено 8 полных оснащений гиперполосного распределения, определенных внутренним образом. Найден геометрический смысл обращения в нуль тензоров первого порядка Λ^n_{vi}, Λ^v_{ni}, Λ^n_{iv}, Λ^i_{nv}, Λ^i_{vn}, Λ^v_{in}.

§ 3 посвящен изучению аффинных связностей на вполне оснащенном гиперполосном распределении m-мерных линейных элементов в C_n. Доказано, что при полном оснащении гиперполосного распределения в C_n полями нормальных (n-m)-сфер $[P_i]$ и касательных m-сфер $[P_\alpha]$ индуцируется аффинная связность ∇ (теорема III.4); приведены компоненты тензора кручения и тензора кривизны связности. В различных расслоениях вполне оснащенного гиперполосного распределения исследуются три пары аффинных связностей (теоремы III.5 – III.8).

В § 4 доказано, что инвариантное полное оснащение гиперполосного распределения в C_n полями квазитензоров x^0_i, x^0_α в расслоении (n-m)-сфер $[P_i]$ индуцирует нормальную связность $\nabla^\perp$; приведены строения компонент тензора кривизны – кручения связности.

В § 5 показано, что распределение $\mathcal{K}$ m-мерных линейных элементов во второй дифференциальной окрестности инвариантным внутренним образом порождает гиперполосное распределение в C_n, для которого распределение $\mathcal{K}$ является базисным. Следовательно, теорию гиперполосного распределения, рассмотренную в главе III, можно приложить к изучению геометрии распределения m-мерных линейных элементов в пространстве C_n, что значительно облегчит разработку теории распределений m-мерных линейных элементов в C_n и обогатит ее новыми геометрическими фактами.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. В разных дифференциальных окрестностях построены инвариантные внутренним образом определяемые оснащения распределения $\mathcal{M}$ гиперплоскостных элементов и гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов в конформном пространстве C_n.

2. Найдены необходимое и достаточное условия, при выполнении которых распределение $\mathcal{M}$ гиперплоскостных элементов является сферическим.

3. Построены основы теории линейных связностей (аффинных, нормальных и конформных), индуцируемых различными оснащениями распределения $\mathcal{M}$ в C_n; в частности:

– аффинная связность $\overset{n-1}{\nabla}$, индуцируемая полным оснащением распределения $\mathcal{M}$ в C_n, является вейлевой, найдены условия, при которых она является римановой и обобщенно римановой;

– найдены условия, при которых нормальные связности $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$, $\overset{1}{\nabla}{}^{\perp}$, $\overset{*}{\nabla}{}^{\perp}$ на вполне оснащенном распределении $\mathcal{M}$ в C_n являются полуплоскими, а также условия, при которых связности $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$, $\overset{1}{\nabla}{}^{\perp}$ имеют одинаковые тензоры кривизны–кручения;

– получены условия параллельности гладкого поля одномерных направлений в нормальных связностях $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$, $\overset{1}{\nabla}{}^{\perp}$, $\overset{*}{\nabla}{}^{\perp}$, $\overset{**}{\nabla}{}^{\perp}$;

– касательное оснащение распределения $\mathcal{M}$ в C_n индуцирует пространство конформной связности $C_{n,n-1}$ с полем метрического тензора g_{ij}; в случае нулевого кручения оно является эквиконформным и выполняются аналоги тождеств Риччи;

– невырожденное полное оснащение распределения $\mathcal{M}$ в C_n индуцирует второе пространство конформной связности $\overset{1}{C}_{n,n-1}$, метрический тензор которого совпадает с метрическим тензором g_{ij} пространства $C_{n,n-1}$.

4. Найдено приложение аффинной связности $\overset{n-1}{\nabla}$ к изучению внутренней геометрии тканей на подмногообразии $\mathcal{M}$.

5. Введен в рассмотрение новый дифференциально-геометрический образ – гиперполосное распределение m-мерных линейных элементов в C_n ($m<n-1$), получен ряд результатов по исследованию аффинных и нормальных связностей, индуцированных полным оснащением этого многообразия.

6. Найдено приложение теории гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов к изучению внутренней геометрии распределений m-мерных линейных элементов в конформном пространстве C_n.

Список литературы

[1] Акивис М. А. Инвариантное построение геометрии гиперповерхности конформного пространства / М. А. Акивис // Матем. сб. – М., 1952. – Т. 31. – № 1. – С. 43–75.

[2] Акивис М. А. К конформно-дифференциальной геометрии многомерных поверхностей / М. А. Акивис // Матем. сб. – М., 1961. – Т. 53. – № 1. – С. 53–72.

[3] Близникас В. И. Дифференциальная геометрия неголономной гиперповерхности риманова пространства / В. И. Близникас // Liet. mat. rinkinys. Лит. мат. сб. – 1971. – Т. 11. – № 11. – С. 63–74.

[4] Бронштейн Р. Ф. К конформной теории многомерных распределений / Р. Ф. Бронштейн // Геометрия погруженных многообразий. – М. : МГПИ, 1983. – С. 17–25.

[5] Бушманова Г. В. Элементы конформной геометрии / Г. В. Бушманова, А. П. Норден. – Казань : Изд-во Казанск. ун-та, 1972. – 178 с.

[6] Вагнер В. В. Теория составного многообразия / В. В. Вагнер // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. – М. : МГУ, 1950. – Вып. 8. – С. 11–72.

[7] Лаптев Г. Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий / Г. Ф. Лаптев // Труды Моск. матем. о-ва : сб. ст. – 1953. – Т. 2. – С. 275–382.

[8] Лаптев Г. Ф. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований / Г. Ф. Лаптев // Труды 3-го Всес. матем. съезда. – М., 1958. – Т. 3. – С. 409–418.

[9] Лаптев Г. Ф. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I. / Г. Ф. Лаптев, Н. М. Остиану // Труды Геометр. семинара / ВИНИТИ АН СССР. – М., 1971. – Т. 3. – С. 49–94.

[10] Михайлова А. Н. Линейные связности на частично оснащенной гиперполосе конформного пространства / А. Н. Михайлова // ВИНИТИ РАН. – М., 2001. – № 719. – В2001. – 19 с.

[11] Норден А. П. О нормализованных поверхностях конформного пространства / А. П. Норден // Изв. АН СССР. Сер. Матем. – 1950. – Т. 14. – № 2. – С. 105–122.

[12] Норден А. П. Пространства аффинной связности / А. П. Норден. – М. : Наука, 1976. – 432 с.

[13] Остиану Н. М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве / Н. М. Остиану // Труды Геометр. семинара / ВИНИТИ АН СССР. – М., 1973. – Т. 4. – С. 71–120.

[14] Попов Ю. И. Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства / Ю. И. Попов. – Изд-во С. – Петербургского ун-та, 1992. – 172 с.

[15] Розенфельд Б. А. Дифференциальная геометрия образов симметрии / Б. А. Розенфельд // ДАН СССР. – 1948. – Т. 59. – № 6. – С. 1057–1060.

[16] Столяров А. В. Двойственная теория оснащенных многообразий / А. В. Столяров. – 2-е изд., доп. – Чебоксары : Изд-во Чуваш. гос. пед. ин-та, 1994. – 290 с.

[17] Столяров А. В. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований и его приложения / А. В. Столяров. – Чебоксары : Чуваш. гос. пед. ун-т, 2002. – 204 с.

[18] Столяров А. В. Конформно-дифференциальная геометрия оснащенных многообразий / А. В. Столяров, Т. Н. Глухова. – Чебоксары : Чуваш. гос. пед. ун-т, 2007. – 180 с.

[19] Филоненко Л. Ф. Распределение m-мерных линейных элементов в конформном пространстве и присоединенные к нему связности / Л. Ф. Филоненко // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. – Калининград, 1995. – Вып. 26. – С. 89–102.

[20] Фиников С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии / С. П. Фиников. – М.-Л. : ГИТТЛ, 1948. – 432 с.

[21] Фисунов П. А. Двойственные нормальные связности на гиперполосах в проективном пространстве / П. А. Фисунов. – Чебоксары, 2006. – 129 с.

[22] Чакмазян А. В. Подмногообразия проективного пространства с параллельным подрасслоением нормального расслоения / А. В. Чакмазян / Казанское мат. об-во. 150 лет неевклидовой геометрии // Материалы Всес. геометр. конференции. – Казань, 1976. – С. 209.

[23] Чакмазян А. В. Нормальная связность в геометрии подмногообразий: Монография / А. В. Чакмазян. – Ереван : Армянск. пед. ин-т, 1990. – 116 с.
[24] Шелехов А. М. О три-тканях, образованных пучками окружностей / А. М. Шелехов // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Современная математика и ее приложения. – М., 2005. – Т. 32. – С. 7–28.
[25] Cartan E. Les éspaces á connexion conforme / E. Cartan // Ann. Soc. Polon. math. – 1923. – 2. – P. 171–211.
[26] Ehresmann C. Les connections infinitesimales dans un espace fibre differentiable / C. Ehresmann // Collque de Topologie. – Bruxelles, 1950. – P. 29–55.
[27] Levi-Civita T. Nozioni di parallelismo in una varieta qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvature Riemanniana / T. Levi-Civita // Rend. circ. Matem. – Palermo, 1917. – P. 173–205.
[28] Thomsen G. Űber konforme Geometrie I. Grundlagen der konformen Flachentheorie / G. Thomsen //Abhandl math. Semin. Univ. – Humburg, 1924. – 3. – P. 31–56.
[29] Weyl H. Raum. Zeit, Materie. – Berlin : Springer, 1923.

РАБОТЫ АВТОРА, ОПУБЛИКОВАННЫЕ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] Матвеева А. М. Аффинные и нормальные связности на вполне оснащенной неголономной гиперповерхности конформного пространства / А. М. Матвеева // Труды Математического центра им. Н. И. Лобачевского : Материалы Пятой молодежной науч. школы-конф. – Казань : Изд-во Казанского мат. об-ва, 2006. – Т. 34. – С. 160–162.
[2] Матвеева А. М. Аффинные и нормальные связности, индуцируемые полным оснащением взаимно ортогональных распределений конформного пространства / А. М. Матвеева // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – Чебоксары, 2006. – № 5 (52). – С. 100–107.
[3] Матвеева А. М. Аффинные и нормальные связности, индуцируемые полным оснащением взаимно ортогональных распределений конформного пространства / А. М. Матвеева // Наука XXI века : сб. ст. по материалам III Республиканского конкурса научно-исследовательских работ студентов, аспирантов, молодых ученых и научно-технических работников (в области естественно-математических наук). – Чебоксары : ЧГИГН, 2006. – С. 4–6.
[4] Матвеева А. М. Аффинные и нормальные связности, индуцируемые полным оснащением взаимно ортогональных распределений конформного пространства / А. М. Матвеева // Современные вопросы геометрии и механики деформируемого твердого тела : тезисы Регион. науч. конф. – Чебоксары : ЧГПУ им. И. Я. Яковлева, 2006. – С. 27–28.
[5] Матвеева А. М. Аффинные связности, индуцируемые полным оснащением взаимно ортогональных распределений конформного пространства / А. М. Матвеева // ВИНИТИ РАН. – М., 2006. – № 395. – В2006. – 16 с.
[6] Матвеева А. М. Дифференциально-геометрические структуры на оснащенной неголономной гиперповерхности конформного пространства / А. М. Матвеева // Научно-информационный вестник докторантов, аспирантов, студентов. – Чебоксары : ЧГПУ им. И. Я. Яковлева, 2006. – № 1 (7). – Т. 1. – С. 28–33.
[7] Матвеева А. М. Аффинные связности на гиперполосном распределении конформного пространства / А. М. Матвеева // Труды Математического центра им.

Н. И. Лобачевского : Материалы Шестой молодежной науч. школы-конф. – Казань : Изд-во Казанского мат. об-ва, 2007. – Т. 36. – С. 144–147.

[8] Матвеева А. М. Дифференциально-геометрические структуры на оснащенной неголономной гиперполосе конформного пространства / А. М. Матвеева // Научно-информационный вестник докторантов, аспирантов, студентов. – Чебоксары : ЧГПУ им. И. Я. Яковлева, 2007. – № 2 (10). – Т. 1. – С. 112–117.

[9] Матвеева А. М. Конформно-дифференциальная геометрия сферического распределения гиперплоскостных элементов / А. М. Матвеева // Дифференциальная геометрия многообразий фигур : Межвуз. темат. сб. науч. тр. – Калининград : Изд-во РГУ им. И. Канта, 2007. – Вып. 38. – С. 95–102.

[10] Матвеева А. М. Конформные связности на оснащенной неголономной гиперповерхности конформного пространства / А. М. Матвеева // Научно-информационный вестник докторантов, аспирантов, студентов. – Чебоксары : ЧГПУ им. И. Я. Яковлева, 2007. – № 1 (9). – Т. 1. – С. 12–19.

[11] Матвеева А. М. Линейные связности на оснащенной неголономной гиперполосе конформного пространства / А. М. Матвеева // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – Чебоксары, 2007. – Т. 1. – № 3 (55). – С. 48–55.

[12] Матвеева А. М. Нормальные связности на вполне оснащенном распределении гиперплоскостных элементов в конформном пространстве / А. М. Матвеева // ВИНИТИ РАН. – М., 2007. – № 443. – В2007. – 21 с.

[13] Матвеева А. М. Параллельные перенесения инвариантных полей пучков гиперсфер в нормальной связности на вполне оснащенном распределении гиперплоскостных элементов в конформном пространстве / А. М. Матвеева // ВИНИТИ РАН. – М., 2007. – № 70. – В2007. – 19 с.

[14] Матвеева А. М. Поля фундаментальных геометрических объектов и аффинные связности на гиперполосном распределении конформного пространства / А. М. Матвеева // ВИНИТИ РАН. – М., 2007. – № 972. – В2007. – 17 с.

[15] Матвеева А. М. Пространство конформной связности, индуцируемое касательным оснащением распределения гиперплоскостных элементов конформного пространства / А. М. Матвеева // Математика. Образование : Материалы XV междунар. конф. – Чебоксары, 2007. – С. 244.

[16] Матвеева А. М. Внутренняя геометрия тканей на распределении гиперплоскостных элементов в конформном пространстве / А. М. Матвеева // ВИНИТИ РАН. – М., 2008. – № 239. – В2008. – 27 с.

[17] Матвеева А. М. Гиперсопряженная система конформного пространства / А. М. Матвеева // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – Чебоксары, 2008. – № 2 (58). – С. 30–36.

[18] Матвеева А. М. Линейные связности на оснащенном распределении гиперплоскостных элементов в конформном пространстве / А. М. Матвеева // Известия вузов. Матем. – Казань, 2008. – № 7. – С. 79–84.

[19] Матвеева А. М. Приложение аффинной связности к изучению внутренней геометрии тканей на распределении гиперплоскостных элементов в конформном пространстве / А. М. Матвеева // Научно-информационный вестник докторантов, аспирантов, студентов. – Чебоксары : ЧГПУ им. И. Я. Яковлева, 2008. – № 1 (11). – Т. 1. – С. 17–23.

Подписано к печати _______________ . Формат 60×84 / $_{16}$.
Бумага ксероксная. Печать трафаретная.
Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз. Заказ ____ .

Отдел оперативной полиграфии
Чувашского государственного педагогического университета
428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.